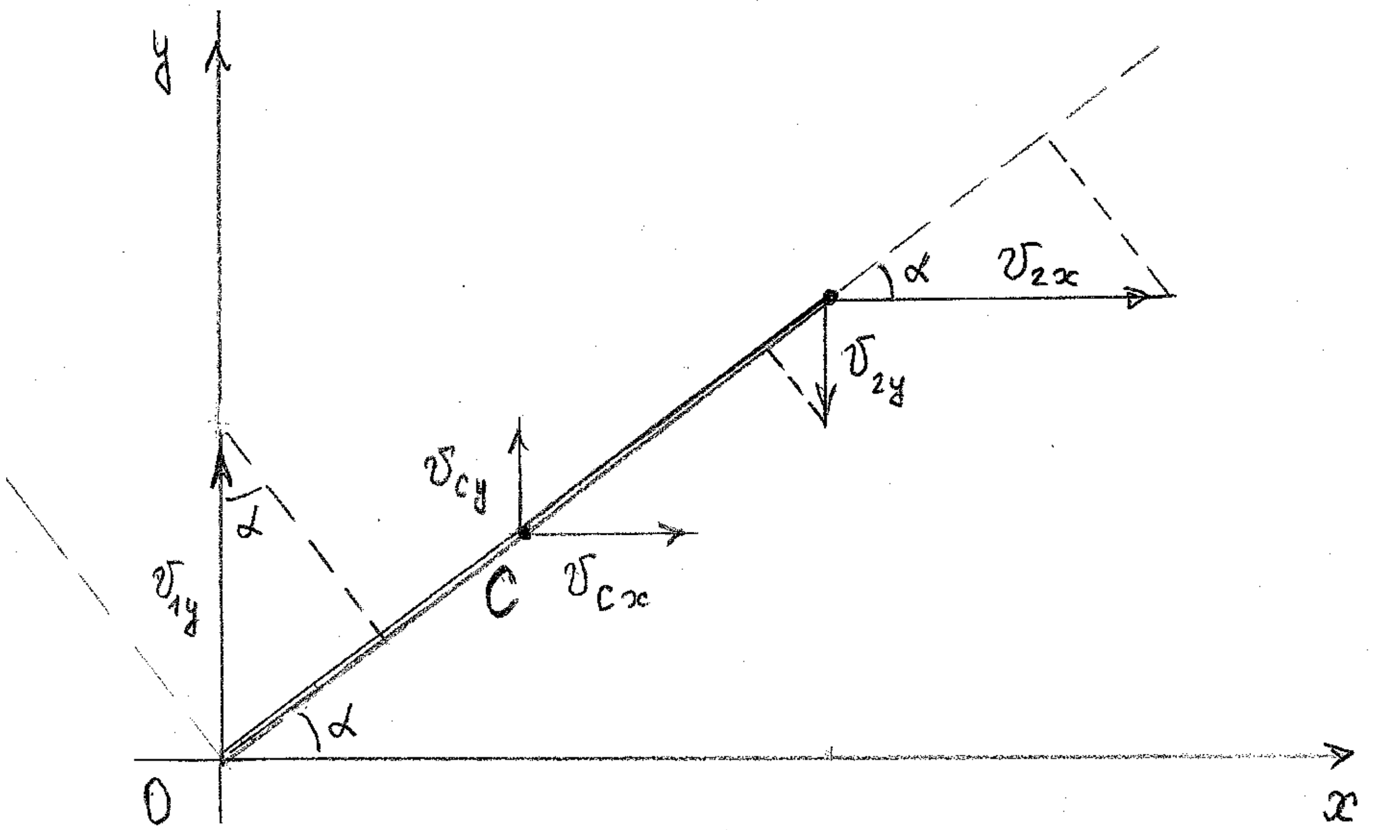
1. Стержень



Очевидно, длина стержня $L = 5$ дм,
$tg\,\alpha = \frac{3}{4}$; $\sin\alpha = \frac{3}{5}$; $\cos\alpha = \frac{4}{5}$.

Продольная скорость двух концов стержня одинакова:

$$v_{2x}\cos\alpha + v_{2y}\sin\alpha = v_{1y}\sin\alpha$$

$$v_{2y} = v_{1y} - v_{2x}\,ctg\,\alpha = 30\left(1-\frac{4}{3}\right)\frac{\text{дм}}{\text{с}} = -10\,\frac{\text{дм}}{\text{с}}.$$

Координаты центра масс однородного стержня:

$$x_C = \frac{1}{2}\left(x_1(t) + x_2(t)\right); \quad y_C = \frac{1}{2}\left(y_1(t) + y_2(t)\right).$$

Поэтому проекции скорости ЦМ:

$$v_{Cx} = \frac{1}{2}\left(v_{1x} + v_{2x}\right) = \frac{1}{2}(0+30)\,\frac{дм}{с} = 15\,\frac{дм}{с}$$

$$v_{Cy} = \frac{1}{2}\left(v_{1y} + v_{2y}\right) = \frac{1}{2}(30-10)\,\frac{дм}{с} = 10\,\frac{дм}{с}$$

Центр масс движется равномерно и прямолинейно. Перейдём в СЦМ. В этой системе ($\vec{v}\,' = \vec{v} - \vec{v}_C$)

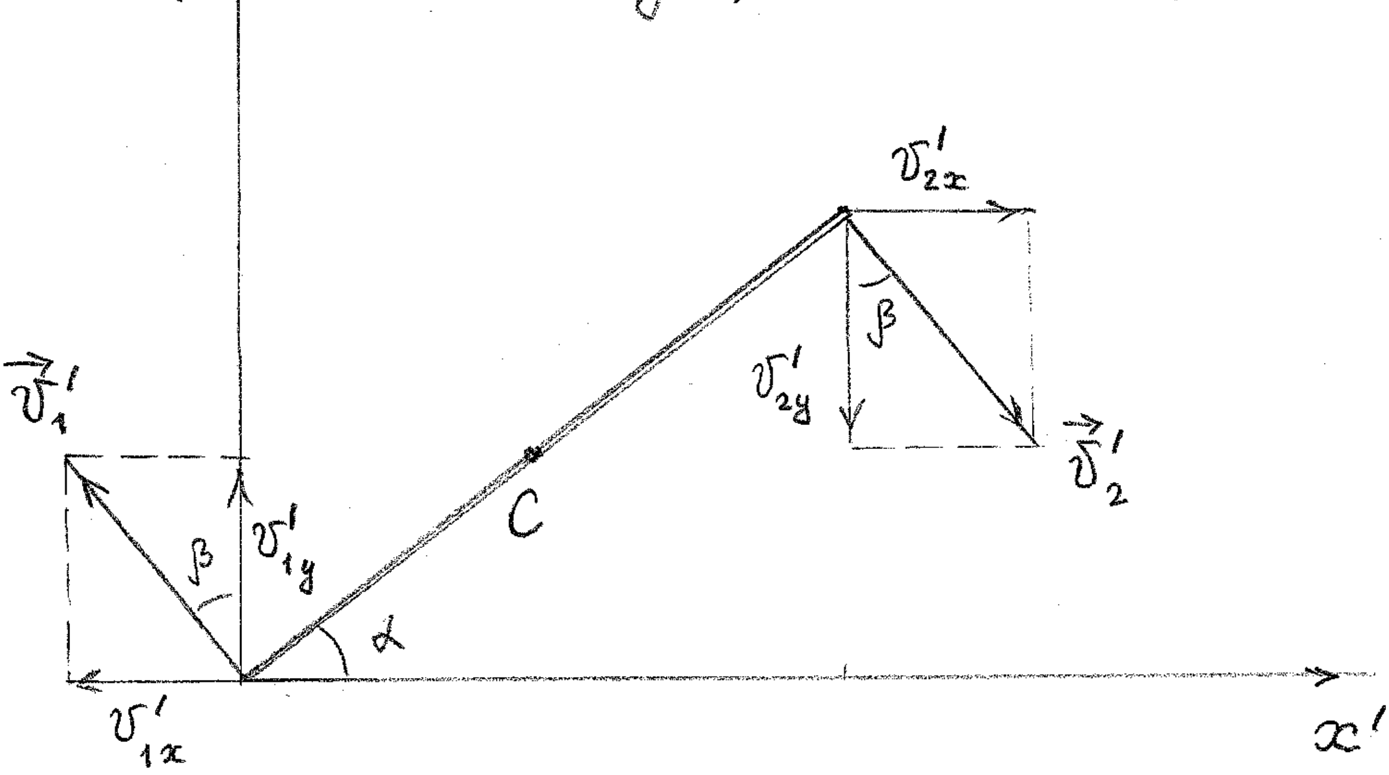
$$v'_{1x} = v_{1x} - v_{Cx} = (0-15)\,\frac{дм}{с} = -15\,\frac{дм}{с}$$

$$v'_{1y} = v_{1y} - v_{Cy} = (30-10)\,\frac{дм}{с} = 20\,\frac{дм}{с}$$

$$v'_{2x} = v_{2x} - v_{Cx} = (30-15)\,\frac{дм}{с} = 15\,\frac{дм}{с}$$

$$v'_{2y} = v_{2y} - v_{Cy} = (-10-10)\,\frac{дм}{с} = -20\,\frac{дм}{с}$$

Очевидно, что $\vec{v}_2' = -\vec{v}_1'$



$$tg\,\beta = \frac{v_{2x}'}{|v_{2y}'|} = \frac{|v_{1x}'|}{v_{1y}'} = \frac{15\ \frac{дм}{с}}{20\ \frac{дм}{с}} = \frac{3}{4} = tg\,\alpha$$

Значит $\vec{v}_2'$ и $\vec{v}_1'$ $\perp$ стержню.

В СЦМ стержень вращается вокруг C.

Угловая скорость вращательного движения

$$\omega = \frac{|\vec{v}_2'|}{L/2} = \frac{\sqrt{v_{2x}'^2 + v_{2y}'^2}}{L/2} = \frac{25\ \frac{дм}{с}}{2{,}5\ дм} = 10\ \frac{рад}{с}$$

Ответы: $\boxed{а)\ v_{2y} = -10\ \frac{дм}{с}}$

$\boxed{б)\ v_{Cx} = 15\ \frac{дм}{с};\ v_{Cy} = 10\ \frac{дм}{с}}$ $\boxed{в)\ \omega = 10\ \frac{рад}{с}}$

2. Средняя скорость

$$v_{cp} = \frac{S}{t}$$

а) $\frac{S}{t} = \sqrt{cS}$;

$\frac{S^2}{t^2} = cS$; $S = ct^2$; $S = \frac{1}{2}at$.

$\boxed{c = \frac{1}{2}a}$ a – ускорение

б) $\frac{S}{t} = b + \sqrt{b^2 + cS}$; $\frac{S}{t} - b = \sqrt{b^2 + cS}$

$\frac{S^2}{t^2} - 2\frac{S}{t}b + b^2 = b^2 + cS$; $\frac{S}{t^2} - 2\frac{b}{t} - c = 0$

$S = ct^2 + 2bt$ $S = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$

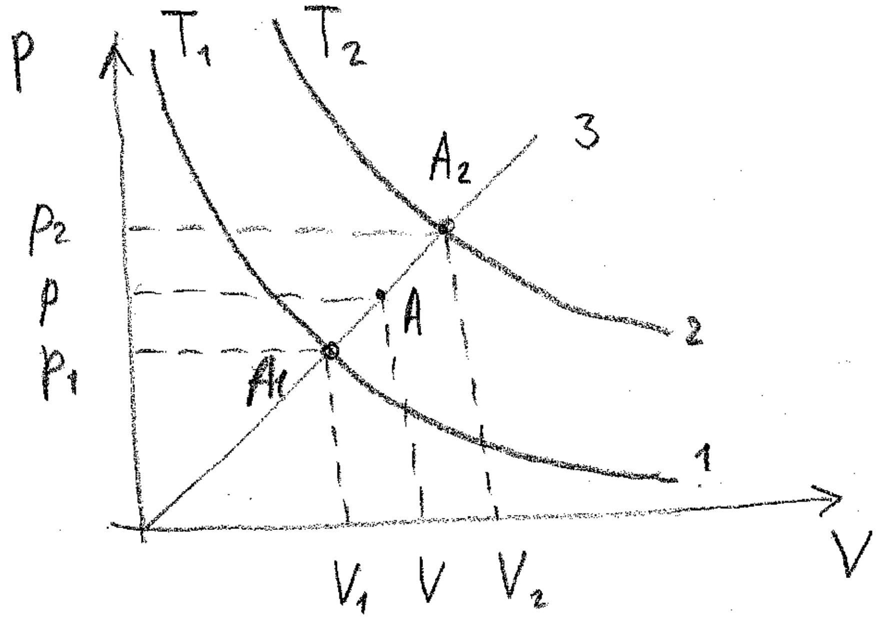
$c = \frac{1}{2}a$ a – ускорение

$b = \frac{1}{2}v_0$ v_0 – нач. скорость

в) $\frac{S}{t} = \sqrt[4]{d \cdot S^3}$; $\frac{S^4}{t^4} = dS^3$ $S = d \cdot t^4$

$d = \frac{1}{4!}\left(\frac{d}{dt}\right)^4 S(t)$ "Ускорение ускорения"

3. Изотермы



$$pV = RT$$

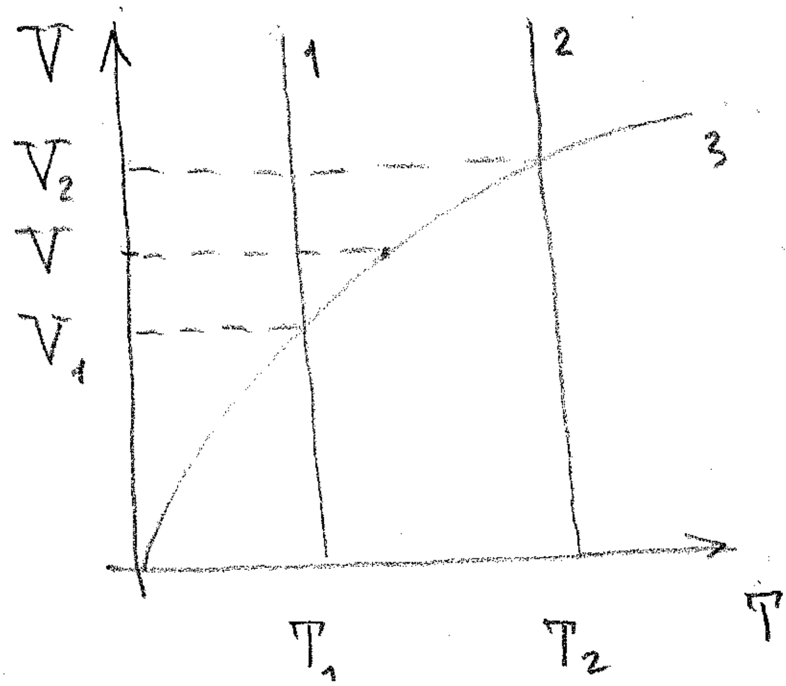
	(p, V)	(V, T)	(p, T)
1.	$p = \frac{RT_1}{V}$	$T = T_1$	$T = T_1$
2.	$p = \frac{RT_2}{V}$	$T = T_2$	$T = T_2$
3.	$p = \alpha V$	$\alpha V^2 = RT$	$\frac{1}{\alpha} p^2 = RT$
		$T = \frac{\alpha}{R} V^2$	$T = \frac{1}{\alpha R} p^2$

A – середина отрезка $A_1 A_2$, поэтому

$$V = \frac{1}{2}(V_1 + V_2) \qquad p = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)$$

6

В (V,T) координатах строим прямые $T=T_1$ и $T=T_2$ и параболу с любым α



$$T=\frac{\alpha}{R}V^2$$

$$T_1=\frac{\alpha}{R}V_1^2$$

$$T_2=\frac{\alpha}{R}V_2^2$$

$$\sqrt{T_1T_2}=\frac{\alpha}{R}V_1V_2$$

$$T=\frac{\alpha}{R}\left(\frac{V_1+V_2}{2}\right)^2=\frac{\alpha}{4R}\left(V_1^2+V_2^2+2V_1V_2\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{\alpha}{R}V_1^2+\frac{\alpha}{R}V_2^2+2\frac{\alpha}{R}V_1V_2\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left[T_1+T_2+2\sqrt{T_1T_2}\right]=\left(\frac{\sqrt{T_1}+\sqrt{T_2}}{2}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{T_1+T_2}{2}+\sqrt{T_1T_2}\right]$$

Среднее арифметическое среднего арифметического и среднего геометрического.

4. Ускорение заряда

Из закона сохранения энергии имеем

$$\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r+l}\right)=\frac{m}{2}v_1^2=\frac{m}{2}(4v)^2, \qquad (4.1)$$

$$\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r+l}-\frac{1}{r+2l}\right)=\frac{m}{2}v_2^2=\frac{m}{2}(3v)^2. \qquad (4.2)$$

Складывая эти равенства, получаем

$$\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r+2l}\right)=\frac{m}{2}V^2=\frac{m}{2}\left(v_1^2+v_2^2\right)$$

$$V^2=v_1^2+v_2^2=25v^2; \quad \boxed{V=5v.}$$

Деля (4.1) на (4.2), получаем

$$\frac{\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r+l}\right)}{\left(\frac{1}{r+l}-\frac{1}{r+2l}\right)}=\frac{v_1^2}{v_2^2}=\frac{16}{9}.$$

$$\frac{\left(\frac{l}{r(r+l)}\right)}{\left(\frac{l}{(r+l)(r+2l)}\right)} = \frac{v_1^2}{v_2^2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2$$

$$\frac{r+2l}{r} = \frac{16}{9}; \qquad 1 + \frac{2l}{r} = \frac{16}{9}$$

$$\frac{2l}{r} = \frac{16}{9} - 1 = \frac{7}{9} \qquad \boxed{r = \frac{18}{7} l}$$

$$r+l = \frac{25}{7} l; \qquad r+2l = \frac{32}{7} l;$$

Вычислим скобки в законах сохранения:

$$\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+l}\right) = \frac{7}{18l} - \frac{7}{25l} = \frac{7 \cdot 7}{2l \cdot 9 \cdot 25}$$

$$\left(\frac{1}{r+l} - \frac{1}{r+2l}\right) = \frac{7}{25l} - \frac{7}{32l} = \frac{7 \cdot 7}{2l \cdot 16 \cdot 25}$$

Таким образом, законы сохранения (4.1) и (4.2) дают:

$$\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{7^2}{2l\cdot 3^2 5^2}\right) = \frac{m}{2}4^2 v^2$$

$$\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{7^2}{2l\ 4^2 5^2}\right) = \frac{m}{2}3^2 v^2$$

Эти равенства эквивалентны. Для массы имеем:

$$\boxed{m = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\ \frac{1}{l v^2}\ \frac{7^2}{3^2 4^2 5^2}}$$

Ответы: $\boxed{a)\ V = 5v}$ $\boxed{б)\ r = \frac{18}{7}l}$

$$\boxed{в)\ m = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{l v^2}\left(\frac{7}{60}\right)^2}$$

5. Конус

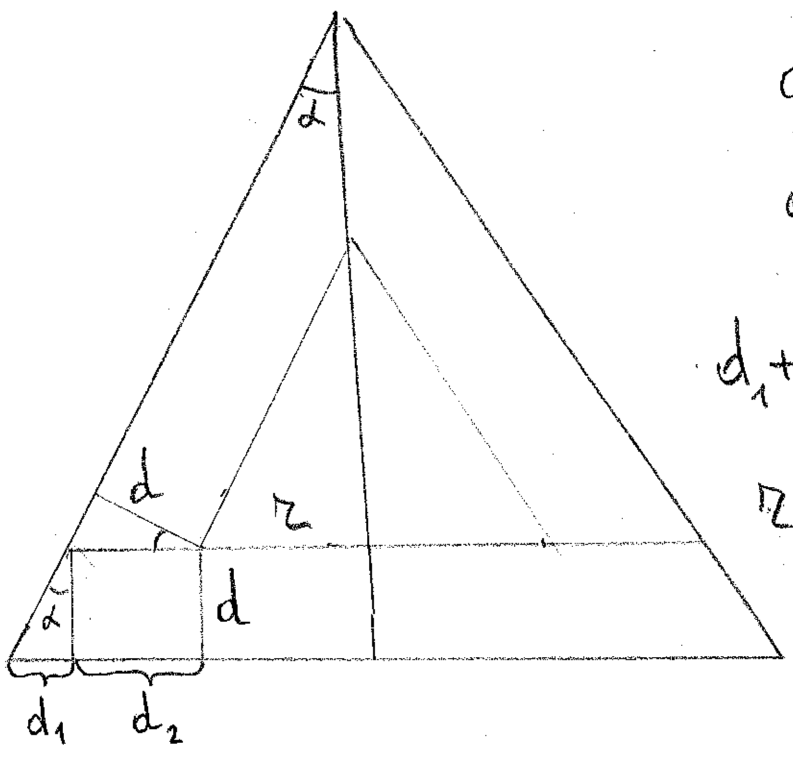
Условие плавания конуса (масса конуса равна массе вытесненной воды)

$$\rho_1 (V - V_{пол}) = \rho_0 V \; ; \quad V_{пол} \text{ – объём полости}$$

$$(\rho_1 - \rho_0) V = \rho_1 V_{пол}$$

$$\frac{V_{пол}}{V} = 1 - \frac{\rho_0}{\rho_1} .$$

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H = \frac{1}{3} \pi R^3 \operatorname{ctg} \alpha$$



$$d_1 = d \operatorname{tg} \alpha$$

$$d_2 = \frac{d}{\cos \alpha}$$

$$d_1 + d_2 = d \left(\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\cos \alpha} \right)$$

$$r = R - d_1 - d_2$$

Радиус основания полости

$$r = \left[R - d\underbrace{\left(\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\cos\alpha}\right)}_{n}\right] = \left[R - nd\right]$$

а) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{R}{H} = \frac{3}{4}$; $\sin\alpha = \frac{3}{5}$; $\cos\alpha = \frac{4}{5}$

$$n_a = \frac{3}{4} + \frac{5}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

б) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{R}{H} = \frac{4}{3}$; $\sin\alpha = \frac{4}{5}$; $\cos\alpha = \frac{3}{5}$

$$n_б = \frac{4}{3} + \frac{5}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

Объём полости

$$V_{пол} = \frac{1}{3}\pi r^3 \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{3}\pi (R - nd)^3 \operatorname{ctg}\alpha =$$

$$= \frac{1}{3}\pi R^3 \left(1 - n\frac{d}{R}\right)^3 \operatorname{ctg}\alpha.$$

Тогда

$$\frac{V_{пол}}{V} = \frac{\frac{1}{3}\pi R^3\left(1 - n\frac{d}{R}\right)^3 \operatorname{ctg}\alpha}{\frac{1}{3}\pi R^3 \operatorname{ctg}\alpha} = \left(1 - n\frac{d}{R}\right)^3$$

Таким образом, условие указанного плавания конуса даёт

$$\frac{V_{пол}}{V} = \left(1 - n\frac{d}{R}\right)^3 = \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_1}\right)$$

$$1 - n\frac{d}{R} = \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_1}\right)^{1/3}$$

$$n\frac{d}{R} = \left[1 - \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_1}\right)^{1/3}\right]$$

$$\boxed{d = \frac{R}{n}\left[1 - \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_1}\right)^{1/3}\right]}$$

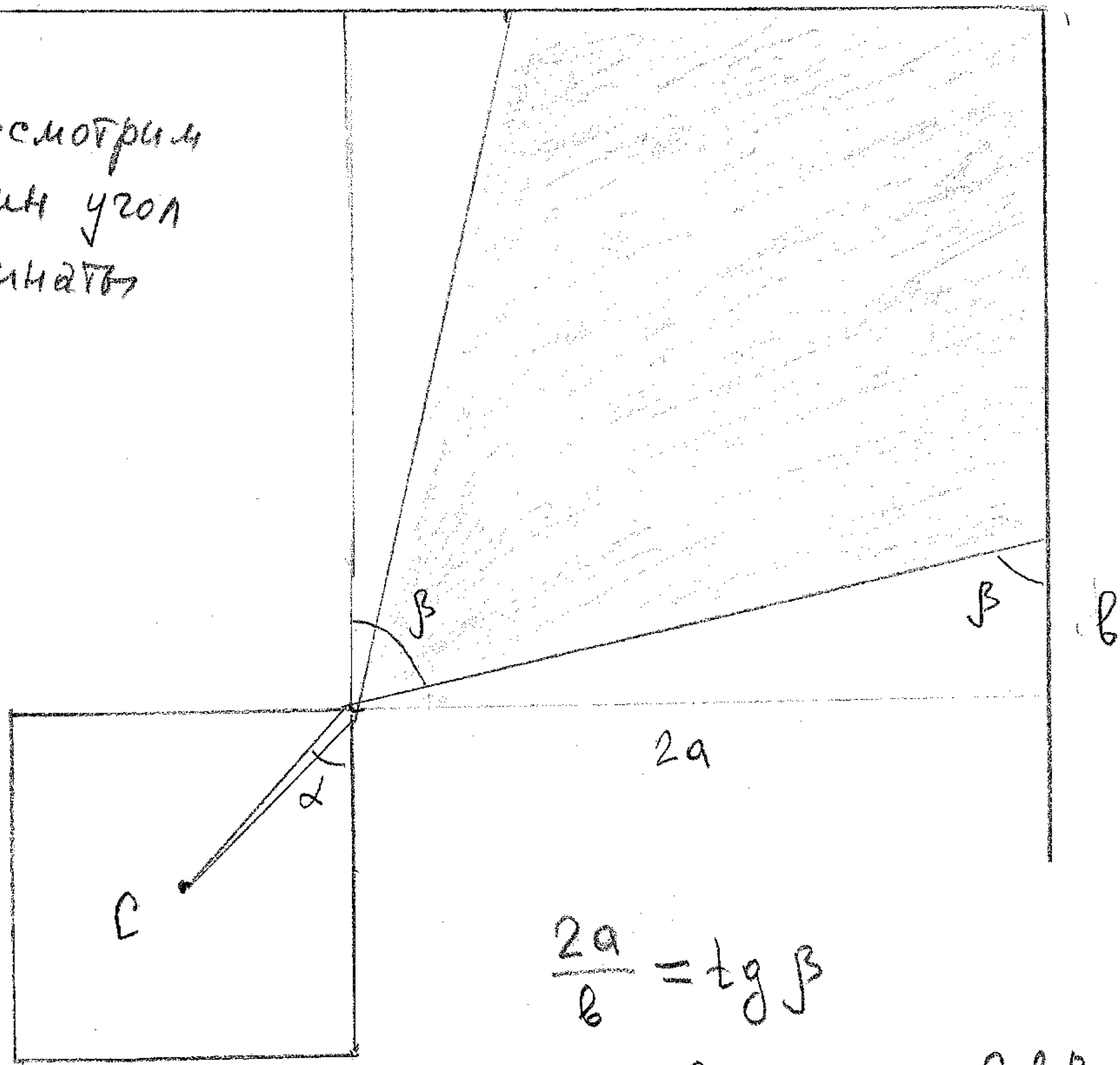
Ответы:

$$\boxed{а)\quad d = \frac{R}{2}\left[1 - \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}}\right]}$$

$$\boxed{б)\quad d = \frac{R}{3}\left[1 - \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_1}\right)^{1/3}\right]}$$

6. Аквариум

Рассмотрим один угол комнаты



$$\frac{2a}{b} = \operatorname{tg}\beta$$

$$b = \frac{2a}{\operatorname{tg}\beta} = 2a\,\frac{\cos\beta}{\sin\beta}$$

$$n\sin\alpha = \sin\beta$$

$$\cos\beta = \sqrt{1 - n^2\sin^2\alpha}$$

$$b = 2a\cdot\frac{\sqrt{1-n^2\sin^2\alpha}}{n\sin\alpha}$$

$$S_{угла} = (2a)^2 - 2a\cdot b = (2a)^2 - (2a)^2\,\frac{\sqrt{1-n^2\sin^2\alpha}}{n\sin\alpha}$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

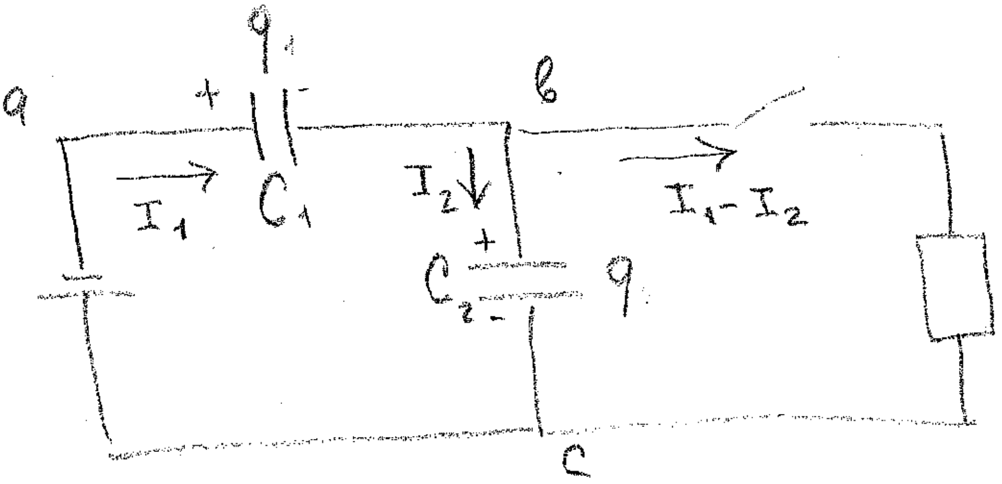
$$\frac{\sqrt{1-n^2\sin^2\alpha}}{n\sin\alpha} = \frac{\sqrt{1-n^2\frac{1}{2}}}{n\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2-n^2}}{n}$$

$$S_{угла} = (2a)^2\left[1-\frac{\sqrt{2-n^2}}{n}\right]$$

$$\sum S_{углов} = 4\cdot 4a^2\left[1-\frac{\sqrt{2-n^2}}{n}\right]$$

Ответ: $\boxed{S = 16a^2\left[1-\frac{\sqrt{2-n^2}}{n}\right]}$

7. Цепь



$I = I_1 - I_2$

$$U_1 = \varphi_a - \varphi_b = \frac{q_1}{C_1}$$

$$U_2 = \varphi_b - \varphi_c = \frac{q_2}{C_2}$$

$$\mathcal{E} = \varphi_a - \varphi_c = U_1 + U_2$$

$$q_1 = q_2 = q$$

$$\mathcal{E} = U_1 + U_2 = \frac{q_1}{C_1} + \frac{q}{C_2} = \frac{q(C_1 + C_2)}{C_1 C_2}$$

$$\boxed{q = \mathcal{E}\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}} = \mathcal{E}\, C_{посл}$$

$$\boxed{q_1(0) = \mathcal{E}\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = q_2(0)}$$

$$I_1 = \dot{q}_1$$
$$I_2 = \dot{q}_2$$

$$\mathcal{E} = \frac{q_1(t)}{C_1} + \frac{q_2(t)}{C_2}$$

$$\frac{q_2(t)}{C_2} = U_2(t) = [I_1(t) - I_2(t)]R$$

$$\ominus \quad \frac{1}{C_1} \begin{cases} \dfrac{\dot{q}_1(t)}{C_1} + \dfrac{\dot{q}_2(t)}{C_2} = 0 \\ \dot{q}_1(t) - \dot{q}_2(t) = \dfrac{1}{R C_2} q_2(t) \end{cases}$$

$$\dot{q}_2 \left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_1} \right) = \frac{1}{R C_1 C_2} q_2(t)$$

$$\dot{q}_2 \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} = \frac{-1}{R C_1 C_2} q_2(t)$$

$$\dot{q}_2 = -\frac{1}{R(C_1+C_2)} q_2(t)$$

$$\boxed{\begin{aligned} q_2(t) &= q_2(0)\, e^{-\frac{t}{R(C_1+C_2)}} \\ I_2(t) &= -\frac{q_2(0)}{R(C_1+C_2)} e^{-\frac{t}{R(C_1+C_2)}} \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{q_1(t)}{C_1} &= \mathcal{E} - \frac{q_2(t)}{C_2} = \mathcal{E} - \frac{q_2(0)}{C_2} e^{-\frac{t}{R(C_1+C_2)}} \\ I_1 = \dot{q}_1(t) &= -\frac{C_1}{C_2} q_2(0)\, e^{-\frac{t}{R(C_1+C_2)}} \frac{-1}{R(C_1+C_2)} \end{aligned}}$$

$$I_1 - I_2 = \left[\frac{C_1}{C_2} + 1 = \frac{C_1 + C_2}{C_2} \right] \frac{q_2(0)}{R(C_1+C_2)} e^{-\frac{t}{R(C_1+C_2)}} = \frac{q_2(t)}{C_2 R}$$

Ток через сопротивление

$$I_R(t) = I_1(t) - I_2(t) = \frac{q_2(t)}{C_2 R} = \frac{U_2(t)}{R}$$

в $t=0$ $\quad I_R(0) = \frac{U_2(0)}{R} = \frac{q_2(0)}{C_2 R} = \mathcal{E}\frac{C_1 C_2}{C_1+C_2}\frac{1}{C_2 R}$

$$\boxed{I_R(0) = \frac{\mathcal{E}\, C_1}{(C_1+C_2)R}}$$

$$I_1(t_0) = I_0$$

$$\frac{\dot q_1(t)}{C_1} + \frac{\dot q_2(t)}{C_2} = 0$$

$+$

$\frac{1}{C_2}\Big|\quad \dot q_1(t) - \dot q_2(t) = \frac{1}{RC_2} q_2$

$$\frac{\dot q_1(t)}{C_1} + \frac{\dot q_1(t)}{C_2} = \frac{1}{RC_2^2} q_2(t)$$

$$\dot q_1(t)\,\frac{C_1+C_2}{C_1 \cancel{C_2}} = \frac{1}{RC_2 \cancel{C_2}} q_2(t)$$

$$\frac{q_2(t)}{C_2} = R\,\frac{C_1+C_2}{C_1}\,\dot q_1(t)$$

$$\boxed{U_2 = R\,\frac{C_1+C_2}{C_1} I_0}$$

$$dQ = I^2(t)\, R\, dt$$

$$I(t) = \frac{\cancel{C_1+C_2}}{C_2} \frac{q_2(0)}{R(\cancel{C_1+C_2})} e^{-\frac{t}{R(C_1+C_2)}}$$

$$I^2(t) = \left(\frac{q_2(0)}{C_2 R}\right)^2 e^{-\frac{2}{R(C_1+C_2)}t}$$

$$\int_0^\infty dQ = \int_0^\infty \left(\frac{q_2(0)}{C_2 R}\right)^2 e^{-\frac{2}{R(C_1+C_2)}t}\, R\, dt =$$

$$= \left(\frac{q_2(0)}{C_2 R}\right)^2 R \; \frac{R(C_1+C_2)}{2} = \left[\frac{\mathcal{E} C_1 \cancel{C_2}}{(C_1+C_2)} \frac{}{\cancel{C_2} R}\right]^2 R\, \frac{R(C_1+C_2)}{2}$$

$$= \mathcal{E}^2 \frac{C_1^2}{(C_1+C_2)} \frac{1}{2}$$

Другой способ | $W_к = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2} CU^2$

Нач. заряды $\quad q_1(0) = q_2(0) = \mathcal{E} \frac{C_1 C_2}{C_1+C_2}$

Нач. энергия $W_1 + W_2 = \frac{q_1^2(0)}{2C_1} + \frac{q_2^2}{2C_2} = \frac{q_1^2(0)}{2} \frac{C_1+C_2}{C_1 C_2} =$

$$= \left(\mathcal{E} \frac{C_1 C_2}{C_1+C_2}\right)^2 \frac{1}{2} \frac{C_1+C_2}{C_1 C_2} = \frac{1}{2} \mathcal{E}^2 \frac{C_1 C_2}{C_1+C_2}$$

Конечная энергия

$$W_{1\,кон} = \frac{1}{2}\mathcal{E}^2 C_1$$

Через ЭДС протек заряд

$$\Delta q = \frac{\mathcal{E}C_1}{\cancel{C_1}} - \mathcal{E}\frac{C_1 C_2}{C_1+C_2} = \mathcal{E}C_1\left[1 - \frac{C_2}{C_1+C_2}\right]$$

$$= \mathcal{E}\frac{C_1^2}{C_1+C_2}$$

ЭДС сов. работу

$$\mathcal{E}\cdot\Delta q = \mathcal{E}^2\frac{C_1^2}{C_1+C_2}$$

$$\frac{1}{2}\mathcal{E}^2\frac{C_1 C_2}{C_1+C_2} + \mathcal{E}^2\frac{C_1^2}{C_1+C_2} = \frac{1}{2}\frac{\mathcal{E}^2 C_1(C_1+C_2)}{C_1+C_2} + \underbrace{\frac{\mathcal{E}^2 C_1^2}{2(C_1+C_2)}}_{Q}$$

$$\frac{1}{2}C_1C_2 + C_1^2 = \frac{1}{2}C_1(C_1+C_2) + \frac{1}{2}C_1^2$$

$$\boxed{Q = \mathcal{E}^2\frac{C_1^2}{C_1+C_2}\,\frac{1}{2}}$$

$C_2 = C$; $C_1 = 3C$

а) $I(0) = \dfrac{\mathcal{E} \cdot 3C}{(C+3C)R} = \dfrac{3}{4}\dfrac{\mathcal{E}}{R}$

б) $Q = \mathcal{E}^2 \dfrac{(3C)^2}{(C+3C)} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{9}{8}\mathcal{E}^2 C$

в) $U_2 = R\,\dfrac{3C+C}{3C} I_0 = \dfrac{4}{3} R I_0$

В общем случае

а) $I(0) = \dfrac{\mathcal{E} C_1}{(C_1+C_2)R}$

б) $Q = \mathcal{E}^2 \dfrac{C_1^2}{C_1+C_2} \cdot \dfrac{1}{2}$

в) $U_2 = R\,\dfrac{C_1+C_2}{C_1} I_0$